1. Algebra

L'algebra si occupa dei numeri reali, dei polinomi, di successioni e funzioni e delle disuguaglianze. Le radici dell'algebra, intesa come come studio di formule utili a risolvere problemi matematici, possono essere individuate nella matematica babilonese (2000 a.C. – 600 a.C.). Il padre dell'algebra è considerato il matematico arabo-persiano Al-Khwarizmi (IX secolo d.C.), autore dell'opera "Compendio sul calcolo tramite compensazione e bilanciamento", che era dedicato principalmente alla risoluzione di equazioni, ma introduceva anche la notazione posizionale e l'uso dello zero, provenienti dal mondo indiano. Il trattato presenta svariati problemi per i quali vengono mostrati passo passo i procedimenti risolutivi, oggi denominati algoritmi.

In epoca moderna gli sviluppi dell'algebra sono stati enormi, tanto che si può distinguere tra: algebra lineare, che si occupa dello studio delle equazioni lineari, dei vettori e delle matrici; algebra astratta, che si occupa di strutture algebriche come gruppi, campi, anelli; infine analisi matematica, che si dedica allo studio delle funzioni e del calcolo infinitesimale.

In questo capitolo ci occuperemo dell'algebra proposta nelle gare di matematica, iniziando dalle progressioni e dalle somme notevoli, per poi dedicarci allo studio dei polinomi e delle loro proprietà e a problemi di manipolazione algebrica. Infine vedremo alcuni approfondimenti sui numeri complessi, sulle successioni e sulle disuguaglianze.

Gli argomenti sono pensati per studenti di seconda superiore, ma si è cercato di rendere le lezioni comprensibili anche a studenti più giovani che abbiano già una conoscenza introduttiva della materia. Le prime quattro lezioni formano la parte fondamentale del corso, mentre le ultime tre sono approfondimenti che possono essere trattati in un secondo momento; tali approfondimenti permettono di avvicinarsi in maniera più consapevole agli esercizi classici delle gare di matematica di medio livello.

1.1 Progressioni e somme notevoli

Inizio sempre il mio corso di algebra con un argomento che non necessita di particolari prerequisiti e cioè le progressioni aritmetiche e quelle geometriche. Solitamente nei libri di testo sono trattate prima le successioni in generale e poi le progressioni come caso particolare. Ma a mio avviso, dal punto di vista didattico, le progressioni costituiscono un possibile argomento introduttivo autosufficiente.
Sono qui proposti esercizi classici che permettono di acquisire familiarità con alcune formule risolutive. Nella seconda parte vengono presentate alcune tecniche per calcolare il valore di somme che coinvolgono molti termini. Sarà l'occasione per familiarizzare con l'importante simbolo di sommatoria.

Progressioni aritmetiche

Definizione 1.1.1. Chiamiamo ***progressione aritmetica*** una successione di numeri reali[1] del tipo $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, tale che la differenza tra due termini consecutivi sia costante:

$$a_i - a_{i-1} = k.$$

La costante k è detta ***ragione*** della progressione aritmetica.

> **Esempio 1.1.1.** Siano $2, 5, 8, \ldots, 98$ i primi n termini di una progressione aritmetica. Quanto vale n? Calcolare $2 + 5 + 8 + \cdots + 98$.

Soluzione. I termini $2, 5, 8, \ldots, 98$ fanno parte di una progressione aritmetica di ragione $k = 3$ in cui $a_1 = 2$ e $a_n = 98$. Il numero di termini è $n = \frac{98-2}{3} + 1 = 33$.
Uno dei problemi classici relativi alle progressioni è quello di calcolare la somma dei primi n termini. Scriviamo la somma nei due modi seguenti: $S = 2 + 5 + \cdots + 98$ e $S = 98 + 95 + \cdots + 2$. Rappresentiamo ora le somme in due righe.

[1] Per una definizione e una trattazione più approfondita delle successioni numeriche si veda la lezione 5 del presente capitolo. Per adesso è sufficiente sapere che una successione numerica è una sequenza ordinata di numeri reali, detti termini della successione.

2	5	8	...	98
98	95	92	...	2

Se calcoliamo la somma dei due numeri di ogni colonna otteniamo sempre 100. Sommando a loro volta tutte queste somme avremo il doppio del totale cercato: $2S = 100 + 100 + \cdots + 100$, dove il 100 compare per 33 volte. Pertanto abbiamo $2S = 100 \cdot 33 = 3300$ e la somma vale $\frac{100 \cdot 33}{2} = 1650$. $\square$

Passiamo a un approccio più generale con l'obiettivo di determinare una formula generica per la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica.

Teorema 1.1.1. (Somma dei primi n termini di una progressione aritmetica) *Siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i primi n termini di una progressione aritmetica di ragione k. La loro somma vale*

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n\,\frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Dimostrazione. Consideriamo la somma cercata, $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, e sfruttiamo la relazione che ogni termine ha con i precedenti: $a_2 = a_1 + k$, $a_3 = a_2 + k = a_1 + 2k$ e così via. L'ultimo termine sarà $a_n = a_{n-1} + k = \cdots = a_1 + k(n-1)$. Sostituendo nella somma abbiamo

$$S = a_1 + (a_1 + k) + \cdots + [a_1 + (n-1)k] = na_1 + k[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)].$$

Applichiamo ora la formula della somma dei primi n interi positivi ricordando che $a_n = a_1 + k(n-1)$. Otteniamo

$$\begin{aligned} S = na_1 + \frac{(n-1)n}{2}k &= \frac{2na_1 + nk(n-1)}{2} = \\ = n\frac{a_1 + a_1 + k(n-1)}{2} &= n\,\frac{a_1 + a_n}{2}. \end{aligned}$$

$\square$

Abbiamo così trovato una formula per la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica. Se si conoscono a_1, a_n e la ragione k, è possibile calcolare il numero di termini e cioè $n = \frac{a_n - a_1}{k} + 1$.
Nel nostro esempio $n = \frac{98-2}{3} + 1 = 33$ e, applicando le relazioni appena introdotte, $S = 33 \cdot \frac{2+98}{2} = 1650$.

Progressioni geometriche

Definizione 1.1.2. Chiamiamo ***progressione geometrica*** una successione di numeri reali del tipo $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, tale che il rapporto tra due termini consecutivi sia costante:

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = k.$$

Questa costante k è detta ***ragione*** della progressione geometrica.

Esempio 1.1.2. Siano $3, 6, 12, \ldots, 192$ i primi n termini di una progressione geometrica. Quanto vale n? Calcolare $3 + 6 + 12 + \cdots + 192$.

Soluzione. I termini $3, 6, 12, \ldots, 192$ fanno parte di una progressione geometrica di ragione $k = 2$ in cui $a_1 = 3$ e $a_n = 192$. Per calcolare il numero di termini determiniamo per quante volte si è moltiplicato per 2. Dato che $\frac{192}{3} = 64$ e $64 = 2^6$, abbiamo $n = 7$.

Anche in questo caso è richiesto di calcolare la somma dei primi n termini della progressione. Procediamo raccogliendo il 3 in modo da ottenere una somma di potenze di 2:

$$S = 3 \cdot (1 + 2 + \cdots + 2^6).$$

Per semplificare il calcolo togliamo e aggiungiamo 1. In questo modo avremo un secondo addendo di valore 2:

$$S = 3 \cdot (-1 + 1 + 1 + 2 + \cdots + 2^6) = 3 \cdot (-1 + 2 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64).$$

A questo punto si formano progressivamente addendi uguali e un passaggio alla volta si ottiene

$$S = 3 \cdot (-1 + 4 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64) = \ldots = 3 \cdot (128 - 1) = 381. \qquad \square$$

Passiamo anche in questo caso a un approccio più generale con l'obiettivo di trovare una formula generica per la somma dei primi n termini di una progressione geometrica.

Teorema 1.1.2. (Somma dei primi n termini di una progressione geometrica) *Siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i primi n termini di una progressione geometrica di ragione k. La loro somma vale*

$$S = a_1(1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1}) = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

Dimostrazione. Consideriamo la somma $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e sfruttiamo la relazione che ogni termine ha con i precedenti: $a_2 = a_1 k$, $a_3 = a_2 k = a_1 k^2$ e così via. L'ultimo sarà $a_n = a_{n-1} k = \cdots = a_1 k^{n-1}$. Avremo

$$S = a_1 + (a_1 k) + \cdots + (a_1 k^{n-1}) = a_1(1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1}).$$

Per la formula della differenza di potenze[2] risulta

$$S = a_1(1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1}) = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}. \qquad \square$$

Abbiamo quindi ottenuto una formula per la somma dei primi n termini di una progressione geometrica. Per applicarla è necessario conoscere il numero dei termini, che si ottiene dall'espressione $k^{n-1} = \frac{a_n}{a_1}$.

L'esempio precedente può essere risolto immediatamente, noto che $2^{n-1} = \frac{192}{3} = 64$ e quindi $n = 7$. Di conseguenza si ottiene che $S = 3 \cdot \frac{2^7-1}{2-1} = 391$.

Esempio 1.1.3. * **Esame di Stato, 2006.** Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano, un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcolare il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

Soluzione. Se numeriamo le caselle da 1 a 64, i chicchi sull'n-esima casella saranno 2^{n-1}. Si tratta di numeri in progressione geometrica la cui somma sarà $S = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1$. Dare una stima approssimata di questo valore è complesso. La classica stima per le potenze di due pone $2^{10} = 1024 \approx 10^3$ (errore $\frac{1000-1024}{1024} \approx -2{,}4\%$, dove il segno meno indica che la stima è più bassa del valore corretto) e porta a $2^{64} - 1 \approx 2^4 \cdot 2^{60} = 16 \cdot (2^{10})^6 \approx 16 \cdot 10^{18}$. Dato che è coinvolto un elevamento alla sesta potenza l'errore relativo aumenta di circa sei volte[3], quindi non abbiamo fatto una buona stima.

Conviene procedere con la calcolatrice scientifica, che è ammessa all'Esame di Stato. Si ottiene un numero di chicchi $\approx 1{,}84 \cdot 10^{19}$ e un peso di $\approx 1{,}84 \cdot 10^{19} \cdot \frac{38}{1000}$ g, cioè $\approx 7 \cdot 10^{14}$ kg $= 7 \cdot 10^{11}$ tonnellate.

Possiamo a questo punto valutare l'errore commesso nella nostra stima precedente: $\frac{16 \cdot 10^{18} - (2^{64}-1)}{2^{64}-1} \approx -13\%$. Quindi effettivamente l'errore aumenta di circa sei volte, come avevamo previsto.

---

[2] La scomposizione $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$ è una scelta standard nel caso n dispari (si veda ad esempio U Math 10 [2] pag. 119). Quando n è pari in genere si procede iniziando a scomporre l'espressione come differenza di quadrati. La formula è valida anche nel caso pari e questo è utile in alcune dimostrazioni. Per verificarla è sufficiente eseguire il calcolo $(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$. Una dimostrazione generale per ogni n non è semplice.

[3] Si tratta di una conseguenza delle regole di propagazione degli errori che si studiano nei corsi di fisica. Una di queste regole afferma che, nel caso di due misure x e y con errori relativi $\frac{\Delta x}{x}$ e $\frac{\Delta y}{y}$, l'errore relativo del prodotto $z = xy$ è la somma degli errori relativi delle misure e quindi $\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$. Di conseguenza nel caso di un elevamento alla sesta potenza, $z = x^6$, ci si aspetta che $\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \cdots + \frac{\Delta x}{x} = 6\frac{\Delta x}{x}$.

In assenza della calcolatrice potremmo migliorare la stima di $16 \cdot 10^{18}$ proprio grazie al fatto che l'errore previsto è $\approx -2{,}4\% \cdot 6 = -14{,}4\%$ e quindi arrivare a una valutazione più ragionevole aumentando la nostra stima tramite il fattore di correzione $1 + 0{,}144 = 1{,}144$. Si ottiene $\approx 1{,}144 \cdot 16 \cdot 10^{18} = 1{,}83 \cdot 10^{19}$, valore particolarmente buono perché porta a un peso di circa $7 \cdot 10^{11}$ come nella soluzione senza approssimazioni.
Lo spirito di questa conclusione è che se si hanno le idee chiare su come si propagano gli errori nelle stime è possibile dare soluzioni con una buona approssimazione anche senza calcolatrice[4]. □

Esempio 1.1.4. Trovare la somma di tutti i divisori positivi di 36.

Soluzione. Fattorizziamo il numero $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Sappiamo che il numero di divisori positivi[5] è $N = (2+1) \cdot (2+1) = 9$. Scriviamoli in quest'ordine: $1, 2, 4, 3, 6, 12, 9, 18, 36$.
Indichiamo con σ la somma cercata, $1+2+4+3+6+12+9+18+36$, e procediamo con dei raccoglimenti parziali.

$$\sigma = (1+2+4) + 3(1+2+4) + 9(1+2+4) = (1+2+4)(1+3+9) = 91 \quad \square$$

Questo metodo è applicabile anche in casi più complessi. Vale infatti il seguente teorema, di cui non daremo la dimostrazione.

Teorema 1.1.3. (Somma dei divisori di un numero intero positivo) *Dato un intero* $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_N^{\alpha_N}$, *la somma dei suoi divisori positivi è*

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_N^{\alpha_N+1} - 1}{p_N - 1}.$$

Somme notevoli

Capita spesso di dover calcolare somme con molti o addirittura con infiniti addendi (in quest'ultimo caso sono chiamate *serie*). Un simbolo che permette il passaggio da somme lunghe scritte in modo esteso a scritture compatte è quello di sommatoria,

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \, .$$

[4] Ci si potrebbe domandare cosa si intenda per "buona approssimazione". La risposta dipende dal contesto e in particolare dagli obiettivi del risolutore. Un'approssimazione con un errore superiore al 5% non è quasi mai considerata buona (perché non si ha la garanzia di avere individuato le corrette cifre significative), mentre una inferiore all'1% è in genere apprezzata perché assicura la correttezza delle prime cifre significative. Nel nostro caso abbiamo cercato di risolvere il problema determinando almeno le prime due cifre significative.

[5] U Math 10 [2] p. 63, Osservazione 2.1.1.

La lettera sigma maiuscola, $\sum$, significa somma dei termini a_n, dove il simbolo a_n indica ciascuno degli addendi al variare di n da un valore minimo a un massimo (nell'esempio da 1 a N). A volte queste somme possono essere calcolate con artifici di tipo algebrico. Le somme più note vengono chiamate *somme notevoli*. Per calcolare queste somme è necessario trovare un modo per semplificare il calcolo. Una buona strategia è quella di accoppiare i termini tra loro oppure spezzarli in modo opportuno.

Esempio 1.1.5. Coppa Kangourou, finale 2010. Calcolare la somma

$$\left(\frac{1+2}{3}+\frac{4+5}{6}+\frac{7+8}{9}+\cdots+\frac{2008+2009}{2010}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{670}\right).$$

Soluzione. Cominciamo a calcolare i vari termini.

$$\left(1+\frac{3}{2}+\frac{5}{3}+\cdots+\frac{1339}{670}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{670}\right)$$

Notiamo che gli addendi sono 1340. Provando ad accoppiare quelli con gli stessi denominatori, osserviamo che il risultato è sempre 2. Quindi

$$2+2+\cdots+2=2\cdot 670=1340.$$

Ai più esperti può essere utile mostrare una soluzione che sfrutti il simbolo di sommatoria e il calcolo letterale per arrivare a delle semplificazioni. Prima di tutto separiamo la somma iniziale S nelle tre seguenti espressioni.

$$S_1=\frac{1}{3}+\frac{4}{6}+\frac{7}{9}+\cdots+\frac{2008}{2010}=\sum_{n=1}^{670}\frac{3n-2}{3n}$$
$$S_2=\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{8}{9}+\cdots+\frac{2009}{2010}=\sum_{n=1}^{670}\frac{3n-1}{3n}$$
$$S_2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{670}=\sum_{n=1}^{670}\frac{1}{n}$$

Evidentemente $S=S_1+S_2+S_3$. Sia il numero di termini di ogni sommatoria sia l'indice sono gli stessi, pertanto possiamo passare a un'unica sommatoria, scrivendo così la soluzione in modo molto elegante.

$$\sum_{n=1}^{670}\frac{(3n-2)+(3n-1)+3}{3n}=\sum_{n=1}^{670}\frac{6n-3+3}{3n}=\sum_{n=1}^{670}2=2\cdot 670=1340 \qquad \square$$

Esempio 1.1.6. * (*Serie di Mengoli*) Calcolare la seguente somma:

$$S = \sum_{n=1}^{2022} \frac{1}{n(n+1)} .$$

Cosa succede se vogliamo sommare un numero infinito di termini?

Soluzione. Iniziamo a elaborare la somma proposta provando a scrivere alcuni termini in modo esplicito.

$$S = \sum_{n=1}^{2022} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{2022 \cdot 2023}$$

Notiamo che, spezzando i termini in modo furbo, possiamo ottenere una semplificazione: $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, …, $\frac{1}{2022 \cdot 2023} = \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}$. Sommando quindi i termini si ottiene

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{2022 \cdot 2023} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}\right) = 1 - \frac{1}{2023} = \frac{2022}{2023}. \end{aligned}$$

Questo semplice risultato è dovuto al fatto che tutti i termini, tranne il primo e l'ultimo, compaiono una volta con segno positivo e una con segno negativo. □

In questo tipo di esercizi la sfida più ardua è capire come spezzare il termine generale della somma.
A volte, per spezzare una frazione in più parti, è possibile applicare un metodo meccanico, detto *metodo di Hermite*. Nel nostro esempio cercheremo di spezzare il termine generale in due addendi introducendo i parametri A e B nel modo seguente.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{An + A + Bn}{n(n+1)} = \frac{A + (A+B)n}{n(n+1)}$$

Potremo spezzare correttamente la frazione determinando il valore dei coefficienti A e B in modo che $A + (A+B)n$ sia uguale a 1. Sfruttiamo il fatto che i due numeratori devono essere polinomi identici e quindi i loro coefficienti devono essere uguali.
Otteniamo che $A = 1$, $A + B = 0$ e ciò implica $B = -1$. Ora abbiamo la certezza che il termine vada spezzato nella forma

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} .$$

Con questo metodo la semplificazione è automatica.

Passiamo al calcolo della somma della serie. Il procedimento da applicare non è molto diverso da quello delle somme lunghe. Per prima cosa generalizziamo il precedente risultato al caso di N termini. Per questo passo diremo che stiamo calcolando una *somma parziale*.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{N(N+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} = \frac{N}{N+1} \end{aligned}$$

Notiamo che la somma parziale in questo esempio è minore di 1. Osserviamo poi che il termine $\frac{1}{N+1}$ diventa sempre più piccolo all'aumentare di N, quindi la somma S si avvicina progressivamente[6] a 1. In simboli scriveremo

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots = 1.$$

Quando il risultato è finito si dice che la serie *converge*. Le serie che si semplificano spezzando in due il termine generale sono dette *serie telescopiche*.

Approfondimenti

Esempio 1.1.7. * Dimostrare che, se la successione x_0, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ è una progressione aritmetica di ragione d, allora anche i corrispondenti valori della funzione $y = ax + b$ sono in progressione aritmetica.

Soluzione. Determiniamo esplicitamente i valori della funzione in dipendenza dei valori dati: $y_0 = a(x_0) + b, y_1 = a(x_1) + b, y_2 = a(x_2) + b, \ldots, y_n = a(x_n) + b, \ldots$ Calcoliamo le seguenti differenze:

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= a(x_1 - x_0) = ad, \quad y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) = ad, \ldots, \\ y_n - y_{n-1} &= a(x_n - x_{n-1}) = ad, \ldots \end{aligned}$$

Notiamo che le immagini della funzione formano una successione in cui la differenza tra due termini consecutivi è sempre uguale. Quindi anche i valori y sono in progressione aritmetica, con ragione ad. □

[6] I più esperti sanno che esiste una condizione necessaria perché la somma della serie abbia risultato finito ed è che il termine generale, all'aumentare di N, diventi sempre più piccolo (si dice che il termine *tende a zero*), come capita in questo caso.

Esempio 1.1.8. ** Supponiamo di sommare il reciproco di tutti gli interi positivi che nella loro fattorizzazione hanno solo ed esclusivamente i numeri 2, 3, 5. Poniamo la condizione che l'esponente di uno o due fattori può essere nullo, ma i tre esponenti non devono essere tutti nulli. Determinarere la somma e scriverla come frazione ridotta ai minimi termini.

Soluzione. La richiesta è calcolare la somma di una serie: $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{30} + \cdots$. Osserviamo che in alcuni termini i denominatori presentano due o tre fattori primi distinti: $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5} + \cdots$. Utilizzando il calcolo letterale possiamo manipolare l'espressione. Infatti, analogamente al fatto che $(1+a)(1+b)(1+c)-1 = 1+a+b+c+ab+ac+bc+abc-1 = a+b+c+ab+ac+bc+abc$, nel nostro esempio abbiamo $S = (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots)(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots)(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\cdots)-1$. Quindi per concludere è sufficiente determinare la somma delle serie nelle parentesi. Iniziamo dalla prima serie, notando che si tratta di una somma di numeri in progressione geometrica. Tronchiamo dopo N termini e applichiamo il Teorema 1.1.2:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^N} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}.$$

Per grandi valori di N la potenza $\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$ è molto vicina a zero, pertanto possiamo stimare l'espressione come $\frac{0-1}{\frac{1}{2}-1} = 2$.

Analogamente le altre due somme danno $\frac{0-1}{\frac{1}{3}-1} = \frac{3}{2}$ e $\frac{0-1}{\frac{1}{5}-1} = \frac{5}{4}$. La somma perciò è $S = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} - 1 = \frac{11}{4}$. □

1.2 Polinomi e loro proprietà

Uno dei temi fondamentali nell'algebra è lo studio dei polinomi, e questo vale anche nell'ambito delle gare di matematica. Affronteremo due lezioni piuttosto corpose: nella prima daremo una definizione di polinomio e del concetto di radice ed enunceremo, senza dimostrazione, il Teorema fondamentale dell'algebra. Nella seconda esamineremo le proprietà relative al grado di un polinomio e alle operazioni tra polinomi, quindi la valutazione di un polinomio, il principio di identità fra polinomi e il tema dell'irriducibilità.

Tutti questi argomenti sono presenti nel programma scolastico, ma in questa sede, procedendo in modo sintetico e tramite esempi, verranno mostrati alcuni esercizi un po' diversi da quelli proposti a scuola.